

المزكرة التأسيسية في الرياضيات

الرياضية بشكل مختلف

إعداد الأستاذ / أحمد محروس

الفرع الأول - الجبر

٥) كمثلة هذه الأعداد العشرية

1/2 3/4 5/6 7/8 9/10 11/12 13/14 15/16 17/18 19/20 21/22 23/24 25/26 27/28 29/30 31/32 33/34 35/36 37/38 39/40 41/42 43/44 45/46 47/48 49/50 51/52 53/54 55/56 57/58 59/60 61/62 63/64 65/66 67/68 69/70 71/72 73/74 75/76 77/78 79/80 81/82 83/84 85/86 87/88 89/90 91/92 93/94 95/96 97/98 99/100 101/102 103/104 105/106 107/108 109/110 111/112 113/114 115/116 117/118 119/120 121/122 123/124 125/126 127/128 129/130 131/132 133/134 135/136 137/138 139/140 141/142 143/144 145/146 147/148 149/150 151/152 153/154 155/156 157/158 159/160 161/162 163/164 165/166 167/168 169/170 171/172 173/174 175/176 177/178 179/180 181/182 183/184 185/186 187/188 189/190 191/192 193/194 195/196 197/198 199/200 201/202 203/204 205/206 207/208 209/210 211/212 213/214 215/216 217/218 219/220 221/222 223/224 225/226 227/228 229/230 231/232 233/234 235/236 237/238 239/240 241/242 243/244 245/246 247/248 249/250 251/252 253/254 255/256 257/258 259/260 261/262 263/264 265/266 267/268 269/270 271/272 273/274 275/276 277/278 279/280 281/282 283/284 285/286 287/288 289/290 291/292 293/294 295/296 297/298 299/300 301/302 303/304 305/306 307/308 309/310 311/312 313/314 315/316 317/318 319/320 321/322 323/324 325/326 327/328 329/330 331/332 333/334 335/336 337/338 339/340 341/342 343/344 345/346 347/348 349/350 351/352 353/354 355/356 357/358 359/360 361/362 363/364 365/366 367/368 369/370 371/372 373/374 375/376 377/378 379/380 381/382 383/384 385/386 387/388 389/390 391/392 393/394 395/396 397/398 399/400 401/402 403/404 405/406 407/408 409/410 411/412 413/414 415/416 417/418 419/420 421/422 423/424 425/426 427/428 429/430 431/432 433/434 435/436 437/438 439/440 441/442 443/444 445/446 447/448 449/450 451/452 453/454 455/456 457/458 459/460 461/462 463/464 465/466 467/468 469/470 471/472 473/474 475/476 477/478 479/480 481/482 483/484 485/486 487/488 489/490 491/492 493/494 495/496 497/498 499/500 501/502 503/504 505/506 507/508 509/510 511/512 513/514 515/516 517/518 519/520 521/522 523/524 525/526 527/528 529/530 531/532 533/534 535/536 537/538 539/540 541/542 543/544 545/546 547/548 549/550 551/552 553/554 555/556 557/558 559/560 561/562 563/564 565/566 567/568 569/570 571/572 573/574 575/576 577/578 579/580 581/582 583/584 585/586 587/588 589/590 591/592 593/594 595/596 597/598 599/600 601/602 603/604 605/606 607/608 609/610 611/612 613/614 615/616 617/618 619/620 621/622 623/624 625/626 627/628 629/630 631/632 633/634 635/636 637/638 639/640 641/642 643/644 645/646 647/648 649/650 651/652 653/654 655/656 657/658 659/660 661/662 663/664 665/666 667/668 669/670 671/672 673/674 675/676 677/678 679/680 681/682 683/684 685/686 687/688 689/690 691/692 693/694 695/696 697/698 699/700 701/702 703/704 705/706 707/708 709/710 711/712 713/714 715/716 717/718 719/720 721/722 723/724 725/726 727/728 729/730 731/732 733/734 735/736 737/738 739/740 741/742 743/744 745/746 747/748 749/750 751/752 753/754 755/756 757/758 759/760 761/762 763/764 765/766 767/768 769/770 771/772 773/774 775/776 777/778 779/780 781/782 783/784 785/786 787/788 789/790 791/792 793/794 795/796 797/798 799/800 801/802 803/804 805/806 807/808 809/810 811/812 813/814 815/816 817/818 819/820 821/822 823/824 825/826 827/828 829/830 831/832 833/834 835/836 837/838 839/840 841/842 843/844 845/846 847/848 849/850 851/852 853/854 855/856 857/858 859/860 861/862 863/864 865/866 867/868 869/870 871/872 873/874 875/876 877/878 879/880 881/882 883/884 885/886 887/888 889/890 891/892 893/894 895/896 897/898 899/900 901/902 903/904 905/906 907/908 909/910 911/912 913/914 915/916 917/918 919/920 921/922 923/924 925/926 927/928 929/930 931/932 933/934 935/936 937/938 939/940 941/942 943/944 945/946 947/948 949/950 951/952 953/954 955/956 957/958 959/960 961/962 963/964 965/966 967/968 969/970 971/972 973/974 975/976 977/978 979/980 981/982 983/984 985/986 987/988 989/990 991/992 993/994 995/996 997/998 999/1000 1001/1002 1003/1004 1005/1006 1007/1008 1009/1010 1011/1012 1013/1014 1015/1016 1017/1018 1019/1020 1021/1022 1023/1024 1025/1026 1027/1028 1029/1030 1031/1032 1033/1034 1035/1036 1037/1038 1039/1040

وَمِنْ لَدُنْهِ

جديد الأمداد العربية

أعداد لشيبة في آية [٥٥]

۴) $\frac{p}{H}$ یکنوا نسباً اذکار

$$\dot{x}_p \neq \emptyset$$

مثال $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$ إذا كان $3 \neq 0$

٤) الحمر هو الزئفر الحار الذي لا يبرئ (يؤذي)

في بيتنا الوالد هو الخنوا مايد
الجزية في

⑤ (الحكوس البعوى) ← زيف؟ شارة

العدد فـ ١

..... أو يدركوكم البعوض لكل من :-

$$\frac{c}{\sqrt{x}} \downarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \quad d$$

$$1 - \leftarrow 1 \stackrel{p}{=} (1 -)$$

6) اوبو کوس ال خزیی ← نصلی

الاسد وفضله

..... آویزد و او کو سال عربی :-

$$\frac{c}{2} \downarrow \quad \frac{c}{2} \downarrow \quad 0 \quad \frac{c}{2} \downarrow \quad \frac{c}{2} \downarrow$$

قواعد الشارحة

١) حامل غريب ونار مع قصة الإشارات

العشابهة دائماً يكونه موجباً

$\oplus = \frac{+}{+}$ $\ominus = + \times +$
 $\oplus = \frac{-}{-}$ $\ominus = - \times -$

$$\gamma = S - X^W - Q \quad \gamma = S - X^W \leftarrow$$

$$\dots \frac{1}{p} \approx \frac{1}{q}$$

٢) حامل ضرب وشارح قصائد البشارات

الوضوء دائماً يكون سالباً

$\ominus = +X - 2$ $\ominus = -X + 2$
 $\ominus = \frac{-}{+} 2$ $\ominus = \frac{+}{-} 2$

$$\gamma = 2\lambda^2 - 2 \quad \gamma = 2 - \lambda^2 \Leftarrow$$

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2} \quad \& \quad \frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2}$$

الأعداد النفسية

هو الانكسار ويزيد على الضوء

جبل پارس ۵۴۳۰۰۰

جمع وطرح الحدود الجبرية

أولاً: جمع الحدود الجبرية:-

• يفضل استخدام الطريقة الأساسية

مثال: أجمع المقادير

$$2x^2 - 5x + 7 + 3x^2 - 4x + 9$$

الخطوة

$$2x^2 - 5x + 7 + 3x^2 - 4x + 9$$

$$⑤ \quad 2x^2 + 3x^2 - 5x - 4x + 7 + 9$$

$$5x^2 - 9x + 16$$

ثانياً: طرح الحدود الجبرية:-

• يفضل أيضاً استخدام الطريقة الأساسية

مثال: أطلع

$$من \quad 2x^2 - 5x + 7 - (3x^2 - 4x + 9)$$

الخطوة

$$2x^2 - 5x + 7 - 3x^2 + 4x - 9$$

$$⑤ \quad 2x^2 - 3x^2 - 5x + 4x + 7 - 9$$

$$-x^2 - x - 2$$

خرب الحدود والمقادير الجبرية

أولاً: ضرب الحدود الجبرية

• نظرية العامل في العامل والرمز في الرمز

مثال: $2x^2 - 5x + 7 \times 3x^2 - 4x + 9$

2 $2x^2 - 5x + 7 \times 3x^2 - 4x + 9 = 6x^4 - 19x^3 + 47x^2 - 45x + 63$

الحدود والمقادير الجبرية

1 الحدود الجبرية: يتكون من عامل ضرب عاملية أو أكثر

مثال: $5x^2 - 3x + 7$ حد جبري يتكون من

عامل عددي (العامل) عامل جبري

2 درجة الحدود الجبرية: هي مجموع أسس

العوامل الجبرية دون الحدودية

مثال: $5x^2$ من الدرجة الأولى

$3x^2$ من الدرجة الثانية

$2x^2y^3$ من الدرجة الخامسة

$7x^2y^3$ من الدرجة السادسة

3 المقادير الجبرية: يتكون من حدين

جبريين أو أكثر ويضرب بينهما + أو -

فقد: $5x^2 + 3x - 7$ مقدار جبري ذي حدين

$5x^2 + 3x - 7 - 2x^2 + 4x - 9$ مقدار جبري من ثلاث

حدود

4 درجة المقادير الجبرية: هو أعلى

درجة للحدود المكونة له

مثال: $2x^2 + 3x - 7$ من الدرجة الأولى

$3x^2 + 5x - 9$ من الدرجة الثانية

$2x^2 + 3x^2 - 5x - 9$ من الدرجة الثالثة

5 تشابه الحدود الجبرية إذا تشابهت

الرموز والأسس

مثال: $2x^2 - 5x + 7$ و $3x^2 - 4x + 9$

قسمة الحدود والمقادير

قوله: قسمة كثيرات كثيرات

نقسم الكل على الكل
ونقسم الزمالة الزمالة بطرح الأسس

مثال: $\frac{10x^2 - 5x}{5x} = 2x - 1$

$\frac{10x^3 - 5x^2}{5x^2} = 2x - 1$

ثانياً: قسمة مقدار على كثير

نقسم كل حد من حدود هذا المقدار
على هذا الحد مع مراعاة قواعد الأسس

مثال: $\frac{10x^3 + 5x^2 - 1}{5x} = 2x^2 + x - \frac{1}{5x}$

ثالثاً: قسمة مقدار على مقدار آخر

نبدأ الخطوات التالية:

مثال: أوجد خارج قسمة $10x^3 + 5x^2 - 1$ على $5x$

الخطوة الأولى: نكتب ترتيب الحدود أولاً

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \\ 0 \end{array}$$

هذه خارج قسمة $(10x^3 + 5x^2 - 1)$ على $5x$

$$\frac{10x^3 + 5x^2 - 1}{5x} = 2x^2 + x - \frac{1}{5x}$$

ثانياً: ضرب كثيرات كثيرات

نضرب هذا الحد في كل حد من حدود
المقدار [يكون نقول بالتوزيع]

مثال: $(2x - 4)(x - 5) = 2x^2 - 10x - 4x + 20 = 2x^2 - 14x + 20$

$(2x - 4)(x - 5) = 2x^2 - 10x - 4x + 20 = 2x^2 - 14x + 20$

ثالثاً: ضرب مقدارين كثيرين

(أ) الضرب بوجود النظم

مثال: $(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$

الخطوة الأولى: نكتب ترتيب الحدود أولاً

(ب) مجموع حدين في الفرق بينهما

قاعدة: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

مثال: $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$

$(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$

(ج) مربع مقدار ذي حدين

قاعدة: $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$

مثال: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(2x - 4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

$(2x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$

الاعداد الحقيقية 2

نظري باللائمة من الكلام 1 و 2 -

$$\{ \emptyset \} \cup \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \} \cup \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \}$$

$$\emptyset = \{ \emptyset \} \cap \{ \emptyset \} \quad \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \} - \emptyset$$

$$\emptyset = \{ \emptyset \} \cap \{ \emptyset \} \quad \emptyset = \{ \emptyset \} - \{ \emptyset \}$$

$$\sqrt{p} = \sqrt{p} \times \sqrt{p} \quad 1$$

$$\frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 2$$

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \times \frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 3$$

ثانياً: الجذور التربيعية

$$\sqrt{p} = \sqrt{p} \times \sqrt{p} \quad 1$$

$$\frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 2$$

نماذج من الكلام

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p}$$

مثال

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p}$$

مثال

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

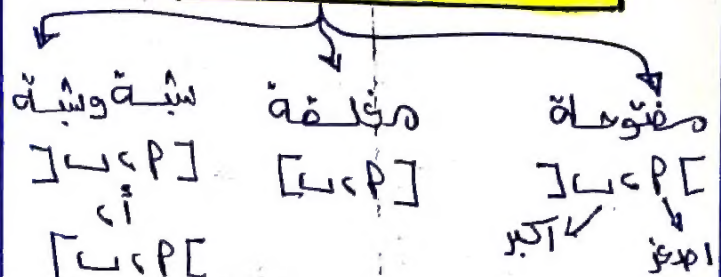
الحل

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

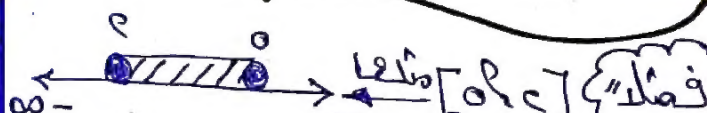
الفترات



(أ) الفترة المفتوحة



(ب) الفترة المغلقة



(ج) شبه مفتوحة، شبه مغلقة



العمليات على الجذور التربيعية وتكيفية

أولاً: الجذور التربيعية

المعادلات

أولاً: معادلة الدرجة الأولى

تعريف: معادلة من الدرجة الأولى
الاولى في x هو ايجاد العدد الحقيقي
«المجهول» الذي يحقق المعادلة

خطوات الحل (توجد 3 خطوات)

مثال $8 = 9 + x$

الخطوة الأولى
 $8 = 9 + x$

$8 - 9 = x$ \Rightarrow $-1 = x$

$\therefore x = -1$

مثال $14 = 7 + x$

الخطوة الأولى
 $14 = 7 + x$

$14 - 7 = x$

$7 = x$

$\therefore x = 7$

$\therefore x = 7$

مثال $6 = 1 - x$

الخطوة الأولى
 $6 = 1 - x$

$6 - 1 = -x$

$5 = -x$

$\therefore x = -5$

$x = -5$

$\therefore x = -5$

مثال $3 = 9 - \frac{x}{2}$

الخطوة الأولى
 $3 = 9 - \frac{x}{2}$

$3 - 9 = -\frac{x}{2}$

$-6 = -\frac{x}{2}$

$6 = \frac{x}{2}$

$\therefore x = 12$

ثانياً: حل معادلة الدرجة الثانية

معادلة الدرجة الثانية هي الصورة

$[ax^2 + bx + c = 0]$

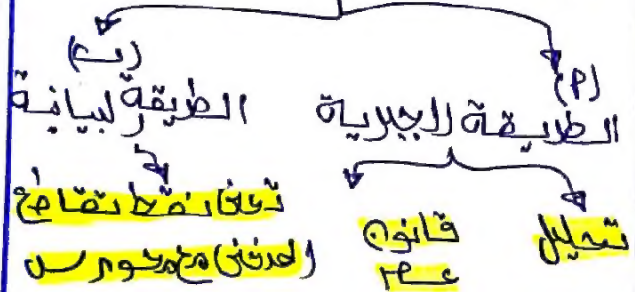
حيث $a \neq 0$

a معامل x^2

b معامل x

c الحد المطلق

..... طرق الحل



(4) الطريقة الجبرية

أما باستخدام التحليل أو القانون
الذي هو ما يسهل تحليل المعادلة

مثال $x^2 - 5x + 6 = 0$

الخطوة الأولى
 $x^2 - 5x + 6 = 0$

يسهل تحليلها $(x-2)(x-3) = 0$

الحدود 2 و 3

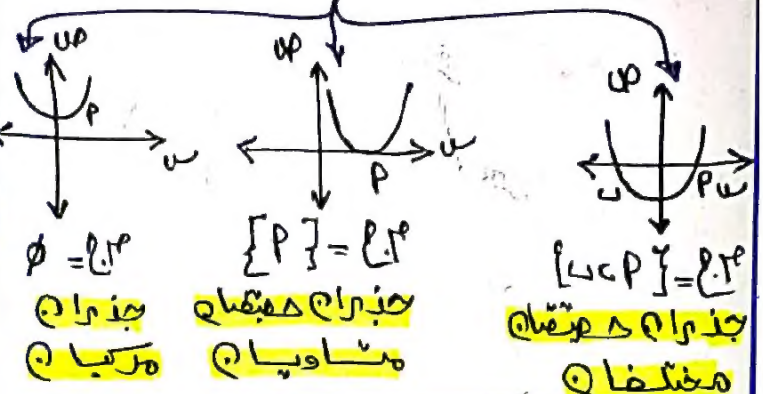
وهذه المعادلة يسهل تحليلها
لذلك نلجأ للقانون (4)

5

(ب) الطريقة البيانية

للتحديد لاجموعة من المعادلات التربيعية
 بيانياً [هندسياً] نوجد نقطة تقاطع
 المنحنيين مع محور السينات

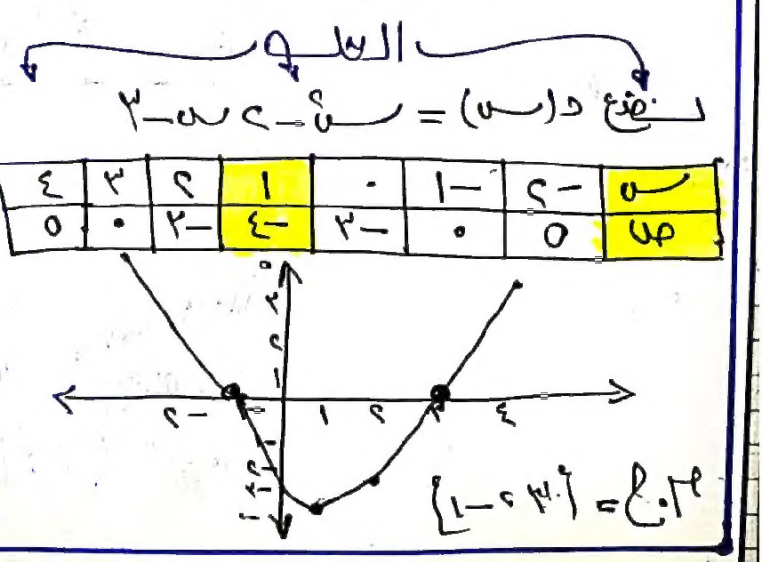
.....



طريقة التحليل

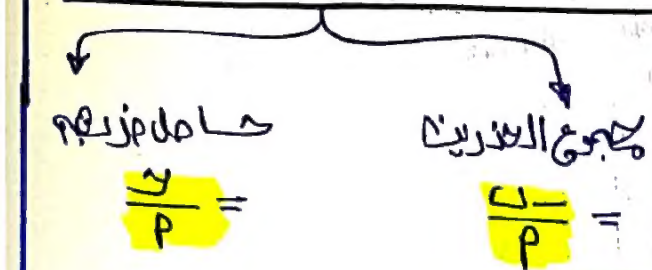
أو لا يعطى فترة
 ذكره بدول بداية ونهاية هذه الفترة
 نوجد رأس الدنتى وهو $(\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

مثال ارسم $y = x^2 - 5x + 6$ مستويين بالفترة $[-2, 8]$



ملحظات عامة على المعادلة التربيعية

أولاً: العلاقة بين جذري
 المعادلة التربيعية



لذلك
 (أ) إذا كان أحد الجذرين مكوس
 فهو للآخر $-a$ $\leftarrow b=0$

(ب) إذا كان أحد الجذرين مكوس
 حزين للآخر a $\leftarrow p=0$
 مثال: أوجد مجموع وحاصل ضرب
 الجذور الآتية:

1 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 مجموع الجذرين $\frac{5}{1} = 5$
 حاصل ضربهم $\frac{6}{1} = 6$

ثانياً: تكوين المعادلة التربيعية من جذريها

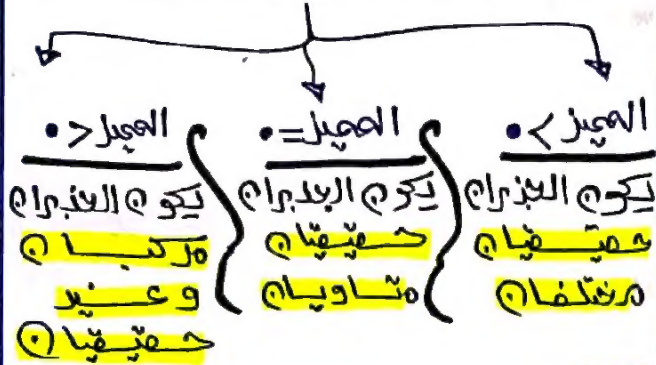
إذا كان الجذران هما α, β
 فإن المعادلة تكون على الصورة

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

مثال: كون المعادلة التي جذريها $2, 3$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$

نوبت الحيز بـ ٤-٥

وعندك ثلثه حركات



مثال حدد نوع البذرين للعبارات التالية:

١ - س - ع - ي - م - م - م

الحيز بـ ٤ - ٥ = ٥ - ٤ = ١
٤ - ١ = ٣ < ٤

∴ البذران صحيحان مختلفان

٢ - س - ع - ي - م - م - م

الحيز بـ ٤ - ٥ = ٥ - ٤ = ١
٤ - ١ = ٣ = ٤

∴ البذران صحيحان متساويان

٣ - س - ع - ي - م - م - م

الحيز بـ ٤ - ٥ = ٥ - ٤ = ١
٤ - ١ = ٣ > ٤

∴ البذران مختلفان

٨ الى يا ميكت علم وفن

* متطابقات عامة ونظائر

١ - $ل + ٩ = ل + ٩ = (ل + ٩) - ل$

٢ - $ل + ٩ = ل + ٩ = (ل + ٩) - ل$

٣ - $\frac{ل + ٩}{ل} = \frac{١}{ل} + \frac{٩}{ل}$

٤ - $\frac{ل + ٩ - (ل + ٩)}{ل} = \frac{ل + ٩}{ل} = \frac{٩}{ل} + \frac{ل}{ل}$

٥ - $(ل - ٩) - (ل + ٩) = ل - ٩ - ل - ٩ = -١٨$

مثال إذا كان ل ٩ فما جذور المعادلة

١ - $ل - ٩ = ١ + ٩ = ١٠$

كون المعادلة التي جذورها ل ٩

من المعادلة الأولى

١ - $\frac{ل}{ل} = \frac{٩}{ل} = ٩$ ٢ - $\frac{٩}{ل} = \frac{ل}{ل} = ١$

من المعادلة الثانية

٣ - $\frac{ل + ٩ - (ل + ٩)}{ل} = \frac{ل + ٩}{ل} = \frac{٩}{ل} + \frac{ل}{ل}$

٤ - $\frac{١ \times ٩ - (٩)}{١} =$

٥ - $\frac{ل}{ل} \times \frac{ل}{ل} = ٩$

∴ المعادلة المطلوبة

٦ - $ل - ٩ = ١ + ٩ = ١٠$

مثال ٩. حدد نوع جذور المعادلة التربيعية

قواعد التحليل

قواعد التحليل بإخراج العامل المشترك

$$P(a+b) = Pa + Pb$$

مثال: $6x^2 + 10x = 2x(3x + 5)$

$$= 2x(3x + 5)$$

مثال: $9x^2 - (x+5) = (x+5)(x-9)$

$$= (x+5)(x-9)$$

ثانياً: تحليل فرق مربعين

$$P^2 - Q^2 = (P-Q)(P+Q)$$

مثال: $9 - 4x^2 = (3-2x)(3+2x)$

$$16 - 9x^2 = (4-3x)(4+3x)$$

$$(x+5)^2 - 4 = (x+5-2)(x+5+2)$$

$$= (x+3)(x+7)$$

ثالثاً: مجموع و فرق مكعبين

$$(P^3 + Q^3) = (P+Q)(P^2 - PQ + Q^2)$$

$$(P^3 - Q^3) = (P-Q)(P^2 + PQ + Q^2)$$

مثال: $8 + 27x^3 = (2+3x)(4-6x+9x^2)$

$$9 - 4x^3 = (3-2x)(9+6x+4x^2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = (3x-4)(x-1)$$

$$= (3x-4)(x-1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$$

وأخيراً: تحليل المقدار الثلاثي

البسيط $ax^2 + bx + c$

قاعدة: العدد الذي يأخذ علامة

الذوية

والعدد الذي يأخذ علامة

حزبه إلى علامتان، ويكونان

الضامة الحاسبة

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 - 11x + 18 = (x-2)(x-9)$$

خامساً: المقدار الثلاثي غير

البسيط $ax^2 + bx + c$

سنستخدم طريقة المقسوم (جرب)

وبجربته نصل إلى الضامة الحاسبة

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$3x^2 - 14x + 8 = (3x-4)(x-2)$$

$$3x^2 - 14x + 8 = (3x-4)(x-2)$$

9

سادساً: تحليل المقدار التربيعي المربع الكامل (ع)

كيف نعرفه أن المقدار الذي أمامنا
مربع كامل :-

- 1) الحد الأول - مربع كامل و إشارة +
- 2) الحد الأخير - مربع كامل و إشارة +
- 3) الحد الأوسط $\pm 2 \times \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثالث}}$

مثال $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

مثال $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

أولاً في الفرق جيداً

حلل

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

الحد الأول x^2 مربع كامل
الحد الأخير 25 مربع كامل
الحد الأوسط $-10x$ $\pm 2 \times \sqrt{x^2} \times \sqrt{25}$ غير بسيط

سابعاً: التحليل بالتقسيم

عبارة من مقدار مكون من ثلاث أو أربعة
حدود والحد الأول وآخر الطرق

P انقسم المقدار إلى مقدارين
كل منهما يتكون من حدين

ال انقسم المقدار إلى مقدارين
مكون من ثلاث حدود و حد آخر

مثال $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$(x+3)(x+2)$

مثال $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

تعاوينك متنوعة على التحليل

1 $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

2 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

3 $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

حامل الحزب الديكارتي

أولاً: T و U ذو حيز مرتين

إذا كان $(P, Q) = (U, V)$

فإن $U = P$ و $V = Q$

مثال إذا كان $(U, V) = (1, 2)$

فإن $U = 1$ و $V = 2$

الآن

$1 = U$

$2 = V$

$1 = U$

$2 = V$

$U = 1$

$V = 2$

ثانياً: حامل الحزب الديكارتي
للمجموعتين وقصيلة

إذا كان $\{1, 2\} = U$ و $\{3, 4\} = V$

$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = U \times V$

$\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} = U \times V$

وكن

$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = U \times V$

$\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} = U \times V$

ننتبه

$U \times V \neq V \times U$

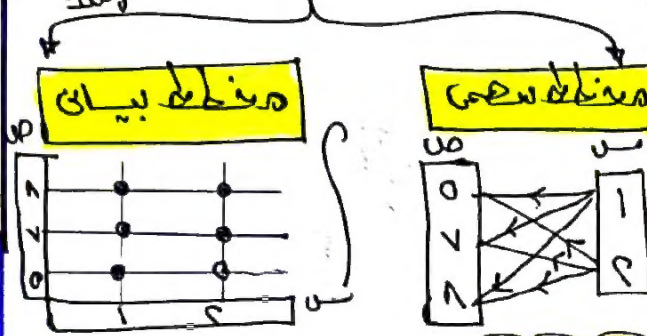
وكن $(U \times V) \cap (V \times U) = \{(1, 1), (2, 2)\}$

في المثال السابق

$U = \{1, 2\}$ و $V = \{3, 4\}$

$U \times V = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

الآن



$U \times \emptyset = \emptyset \times U = \emptyset$

الدوال

دوال: هي مجموعة العلاقات

(P) لو أعطى منطوقاً صحيحاً

هنا العلاقة تعتبر دالة إذا خرج

منها واحد فقط من كل عنصر من عناصر

المجموعة P



ليست دالة

دالة

$X \times X =$ مجال

$X \times X =$ مقادير

$X \times X =$ مدى

$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

$\{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\}$

$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

مجموعة منتهية هي مجموعة

(ب) لو أعطى بيان العلاقة ع :-

هنا العلاقة تعتبر دالة إذا ظهر كل عنصر كحصة أول مرة واحدة

مثال بين أيامها دالة أم لا

1 بيان ع = { (١٠٠١) ، (٥٠٢) ، (٦٠٤) }

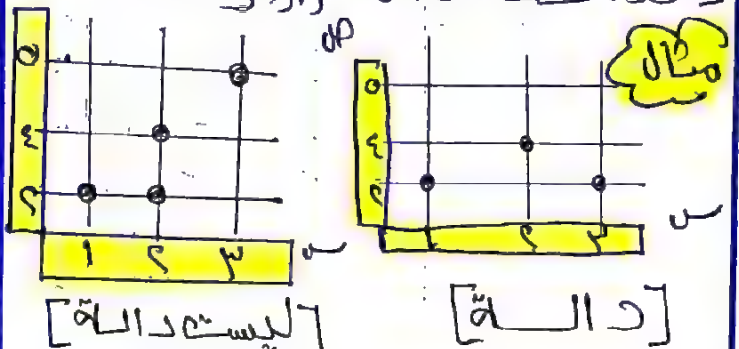
النتيجة
تعتبر دالة لأن كل عنصر من عناصرها
أول مرة واحدة [أي زنة لا يتكرر]

2 بيان ع = { (١٠٠١) ، (٥٠٢) ، (٦٠٤) }

النتيجة
ليست دالة لأن العنصر 1 ظهر أكثر
من مرة كحصة أوله.

(ب) لو أعطى منطوق بيان ع :-

هنا العلاقة تعتبر دالة لو كان
كل عنصر له محور التفاضل موزون
واحدة فقط على المحور الرأس



لأن العنصر 1 له أكثر
من موزون في من.

(د) لو أعطى علاقة مكتوبة :-

دالة لو أن من فردية

ليست دالة لو أن من زوجية

مثال

• من = ٥ - ٤ ← دالة

• من = ٢ - ٥ ← دالة

• من = ٢ + ٥ ← ليست دالة

• من = ١ ← دالة

خاتمة بالاء

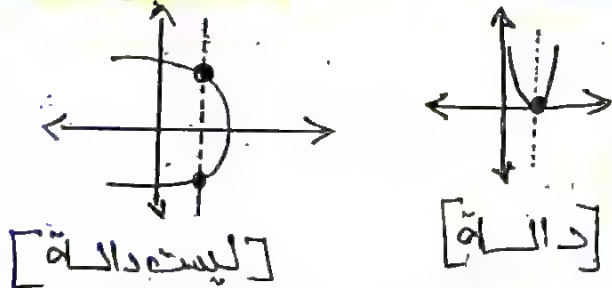
دالة ثابتة. ليست دالة

دالة ثابتة. ليست دالة

(هـ) لو أعطى رسم بياني للعلاقة

نقوم باختيار الخط الرأس

لو قطع الخط
فإنه من دالة
لو لم يقطع الخط
فإنه من دالة



ثانياً: أنواع الالوال

كثيرة
بمعد
كثيرة
جذرية
أسية لوغاري
..... (P) دوال كثيرة حدود

ثابتة
خطية
تربيعية
(د) = (P) = ١
(د) = (P) = ٢
(د) = (P) = ٣

12 مجالهم دائماً أو كامل ع = ع

ثالثاً: مجال الدوال

① دوال كثيرات الحدود

مجال أعداد حقيقية ما لم يذكر خلافه ذلك

مثال

• د(س) = ٥ مجالها \mathbb{R}

• د(س) = $س^2 - ٤س + ٣$ مجالها \mathbb{R}

• إذا كان د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث د(س) = $٣س + ٥$

مجالها \mathbb{R} وليس \mathbb{Z}

• إذا كانت د(س) = $س^2 + ٢$ حيث $س \in [٢, ٤]$

مجالها $[٢, ٤]$ وليس \mathbb{R}

② الدالة الكسرية

هي دالة تحتوي على متغير في المقام

مثال د(س) = $\frac{٥}{٣س + ٥}$ د(س) = $\frac{٥س - ١}{٤س - ٩}$

بينما د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٥}$ ليست دالة

كسرية لأنها كثيرة حدود مجالها \mathbb{R}

* مجال الكسر = $\mathbb{R} - \{ \text{أصفار المقام} \}$

مثال أوجد مجال ما يلي

د(س) = $\frac{٥}{٣س + ٥}$

لوضع $٣س + ٥ = ٠ \rightarrow س = -\frac{٥}{٣}$ المجال $\mathbb{R} - \{-\frac{٥}{٣}\}$

مثال د(س) = $\frac{٣س - ٥}{٤س - ٩}$

التمرين

لو وضع $٤ - س = ٠ \rightarrow س = ٤$

س = ٤ $\leftarrow س \neq ٤$ $\boxed{س \neq ٤}$

∴ مجال د = $\mathbb{R} - \{٤\}$

ثاني بالأمثلة

• مجال د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٥}$ هو \mathbb{R}

• مجال د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٤س + ٩}$ هو \mathbb{R}

③ الدالة الجذرية

(أ) مجال الجذر الذي دالة تسمى دائماً هو \mathbb{R}^+ بشرط وجوده فالليست

مثال مجال د(س) = $\sqrt{٣س + ٥}$ هو \mathbb{R}^+

مثال مجال د(س) = $\frac{٣}{\sqrt{٣س + ٥}}$ هو $\mathbb{R}^+ - \{-\frac{٥}{٣}\}$

(ب) مجال الجذر لو كان الدليل زوجي

لو في المقام لو في البسط

ما تحت الجذر > ما تحت الجذر <

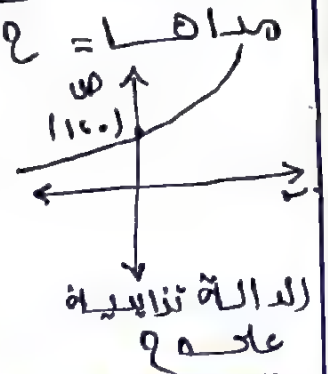
مثال مجال د(س) = $\sqrt{٣س - ٤}$

التمرين
لو وضع $٣س - ٤ \geq ٠ \rightarrow س \geq \frac{٤}{٣}$

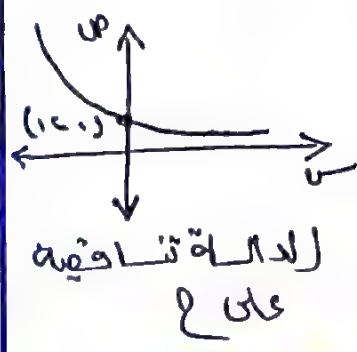
المجال $[\frac{٤}{٣}, \infty)$

④ مجال الدالة الأسية

الدالة الأسية هي $y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$
 مجالها \mathbb{R}
 مداها $(0, \infty)$



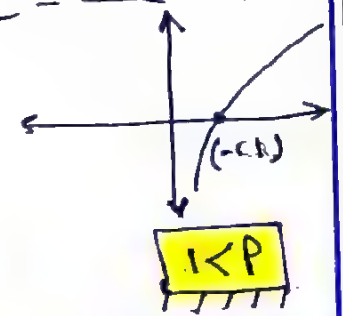
$$1 < a$$



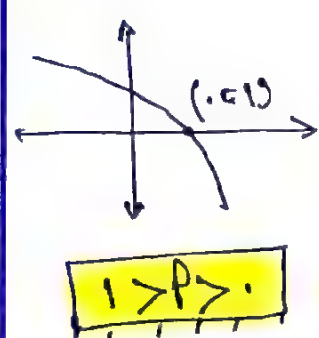
$$0 < a < 1$$

⑤ مجال الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية هي $y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$
 مجالها $(0, \infty)$
 مداها \mathbb{R}



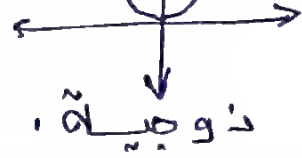
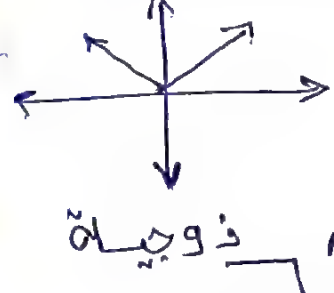
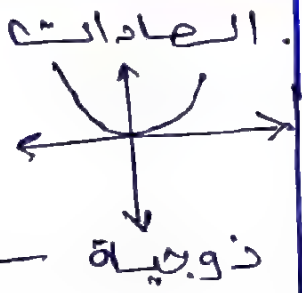
$$1 < a$$



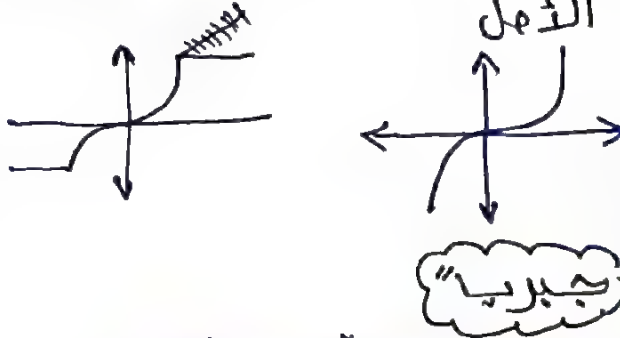
$$0 < a < 1$$

رابعة: الدالة الزوجية والفردية

يُقال للدالة أنها زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات.



يُقال للدالة أنها فردية إذا كانت متماثلة حول نقطة الأصل.



تكون الدالة زوجية لو كانت

$$f(-x) = f(x)$$

تكون الدالة فردية لو كانت

$$f(-x) = -f(x)$$

تكون الدالة ليست زوجية وليست فردية

$$f(-x) \neq f(x) \text{ and } f(-x) \neq -f(x)$$

ملاحظات عامة

لو كان n زوجي $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$
 لو كان n فردي $f^n(x) = -f^{n-1}(x)$
 فمثلاً $f^2(x) = f(f(x))$ و $f^3(x) = -f^2(x)$

$$f^2(x) = f(f(x))$$

$$f^3(x) = -f^2(x)$$

$$f^4(x) = f^2(x)$$

لو كانت الفترة غير متماثلة

كانت الدالة ليست وليست

$$[0, \infty) \cup (-\infty, 0]$$

أو متماثلة فيكون نوعاً ما

خاتمة: الدالة الاحادية

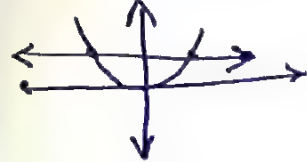
بياناً عن طريق اختبار الدخل

الدفع لـ

قطع الدالة في

أكثر من نقطة

ليست احادية



قطع الدالة في

نقطة واحدة

تكون احادية



الامثلة

كل الدوال الزوجية ليست أحادية
بينما كل الدوال الفردية دوال
أحادية.

جبراً

نفرض أن P ب 3 فجد D

• نوجد $D(P) = D(3)$

لو كانت

$P \neq 3$

فهي ليست احادية

لو كانت

$P = 3$

فهي أحادية

مثال أشبه أن الدالة أحادية

$$\text{حيث } D(3) = \frac{1}{3+3^2}$$

النتيجة

نفرض أن P ب 3 فجد D

• قطع $D(P) = D(3)$

$$\frac{1}{3+3^2} = \frac{1}{3+P^2}$$

$$3+3^2 = 3+P^2$$

$$3^2 = P^2$$

$$P = 3 \quad \text{• الدالة أحادية}$$

مثال أبسط بنوع الدول من لي تكونها
ذو قيمة أم فردية أم ليست وليست

$$1) D(3) = 3^2 - 3 + 0 = 0$$

النتيجة

$$D(3) = (3-3)^2 - 3 + 0 = 0$$

$$0 = 3^2 - 3 + 0$$

$$0 = D(3) = D(3)$$

• الدالة زوجية

النتيجة

$$2) D(3) = 3^2 - 3 + 0 = 0$$

النتيجة

$$D(3) = (3-3)^2 - 3 + 0 = 0$$

$$0 = 3^2 - 3 + 0$$

$$0 = D(3) = D(3)$$

$$0 = (3-3)^2 - 3 + 0$$

$$0 = D(3) = D(3)$$

• الدالة فردية

النتيجة

$$3) D(3) = \frac{3+3^2}{3+3^2} = 1$$

النتيجة

$$D(3) = \frac{(3-3)^2 + 3}{3+3^2} = 1$$

$$1 = \frac{3+3^2}{3+3^2}$$

$$D(3) = \frac{3+3^2}{3+3^2}$$

$$1 = \frac{3+3^2}{3+3^2}$$

$$D(3) = \frac{(3-3)^2 + 3}{3+3^2}$$

$$1 = \frac{3+3^2}{3+3^2}$$

$$D(3) \neq D(3) \neq D(3)$$

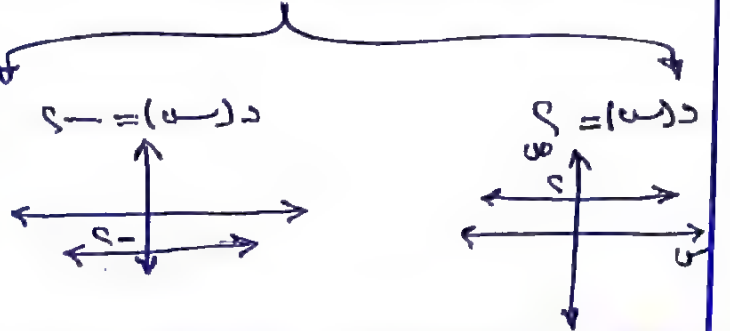
• الدالة ليست زوجية وليست

ذو قيمة

٢) الدالة الثابتة

شكلها $y = (x) = P$ رقم

هي دالة $y = x$ حيث P ثابتة ونحتمل خط
مستقيم يوازي محور السينات
ويقطع الصادات في النقطة $(0, P)$



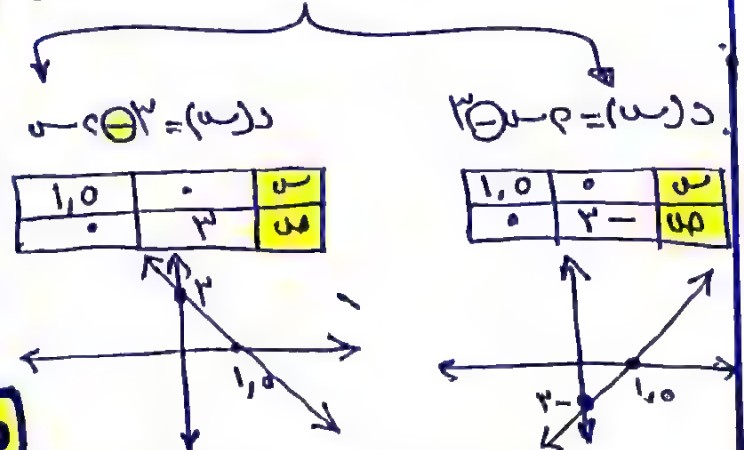
٣) الدالة الخطية

شكلها $y = (x) = P + Qx$

هي دالة $y = x$ حيث P و Q ثابتان ونحتمل خط
مستقيم مائل يقطع محور
الصادات في $(0, P)$ ويقطع محور
السينات في النقطة $(-\frac{P}{Q}, 0)$

حالة بـ ١

$y = (x) = P + Qx$ حيث P و Q ثابتان ونحتمل خط
مستقيم يقطع نقطة الأصل $(0, 0)$



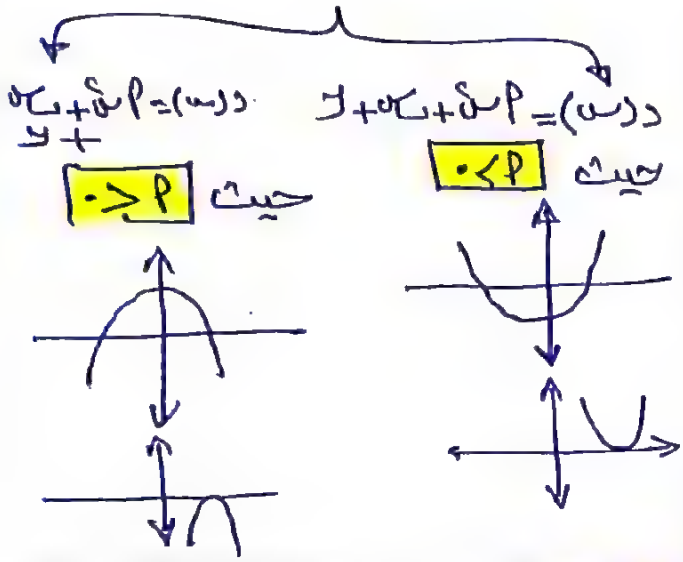
١) الدالة التربيعية

شكلها $y = (x) = P + Qx + Rx^2$

هي دالة $y = x$ حيث P و Q و R ثابتون ونحتمل
منحني قطع

ونحتمل منحنى قطع

نقطة رأسه $(-\frac{Q}{2R}, \frac{4PR - Q^2}{4R})$



٢) الصور القياسية

للدوال

١) الدالة التربيعية

$y = (x) = P + Qx + Rx^2$ حيث P و Q و R ثابتون ونحتمل
منحني قطع



$y = (x) = P + Qx + Rx^2$ حيث P و Q و R ثابتون ونحتمل
منحني قطع

٢) الدالة التكعيبة

$y = (x) = P + Qx + Rx^2 + Sx^3$ حيث P و Q و R و S ثابتون ونحتمل
منحني قطع



$y = (x) = P + Qx + Rx^2 + Sx^3$ حيث P و Q و R و S ثابتون ونحتمل
منحني قطع

٢ دالة الحقيقة

درس = (د) رأس الدخول لها (0,0)
شكلها

درس = (د) رأسها (0,0)
في الربع الأول والثاني
لها الإشارة +

٣ دالة كمومية

درس = (د) رأسها (0,0)
شكلها

درس = (د) رأسها (0,0)
شكلها

تكملة حل المعادلات

دالة - حل معادلتين من الدرجة
الأولى جبرياً في متغيرين

هناك طريقتان للحل إما بال حذف
أو بالتعويض ولكن يفضل استخدام
طريقة الحذف

مثال $0 = 5 - 5 - 9$ $5 = 5 + 5 + 1 = 11$

الحل
① $0 = 5 - 5 - 9$
② $5 = 5 + 5 + 1 = 11$
③ $5 = 5 + 5 + 1 = 11$
لجمع ① مع ③
④ $1 = 5 - 5 - 9$

وبالتعويض في ①

$$0 = 5 - 5 - 9$$

$$0 = 5 - 5 - 9$$

$$[(1 - 9)] = 14$$

ثانياً: حل معادلتين من
متغيرين أحدهما من الدرجة
الأولى والاخرى من الثانية

خطوات الحل -

١ من معادلة الدرجة الأولى

أخذ المتغيرين بدلالة الآخر

٢ نعوين في معادلة الدرجة الثانية

ونحصل على قيمة (أو قيمتين)

مثال $1 = 5 - 5 - 9$ $5 = 5 + 5 + 1 = 11$

الحل

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

بالتعويض من ① في الدرجة الثانية

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$1 = 5 - 5 - 9$$

$$[(1 - 9)] = 14$$

الرياضيات

الأعداد المركبة

التعريف حل المعادلة

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

العدد $i = \sqrt{-1}$ لا لطيف

$$i^2 = -1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

مجموعة الحل في \mathbb{C} =

لذلك تم اللجوء إلى مجموعة حل جديدة
وهي مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C}

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

$$\{i, -i\} = \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$$

ملحوظة عامة

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

$$-i = -\sqrt{-1} \Rightarrow (-i)^2 = -1$$

حيث أن أي عدد مركب مرفوع للأس يقبل
الناتج في \mathbb{C} فيكون الناتج = $\frac{1}{x}$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$(-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{-i}{-i \cdot i} = \frac{-i}{1} = -i$$

مثال

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1 \Rightarrow i^6 = -1 \Rightarrow i^8 = 1 \Rightarrow i^{10} = -1$$

$$i^{12} = 1 \Rightarrow i^{14} = -1 \Rightarrow i^{16} = 1 \Rightarrow i^{18} = -1$$

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على

$$a + bi$$

جزء حقيقي جزء تخيلي

وليس هذه الصيغة بالصيغة البينية

مثال

$$5 = 5 + 0i \Rightarrow \text{عدد مركب حقيقي صرف}$$

$$5i = 0 + 5i \Rightarrow \text{عدد مركب تخيلي صرف}$$

تساوي عددين مركبين

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

فإن:

الحقيقي = الحقيقي التخيلي = التخيلي

$$b = d$$

$$a = c$$

مثال أو بدقيتان $5 + 3i$ و $3 + 5i$ اللتين
تختلفان: المعادلة

$$5 + 3i = 3 + 5i \Rightarrow 5 - 3 = 5i - 3i \Rightarrow 2 = 2i \Rightarrow 1 = i$$

الحقيقي = الحقيقي التخيلي = التخيلي

$$5 + 3i = 3 + 5i \Rightarrow 5 - 3 = 5i - 3i \Rightarrow 2 = 2i \Rightarrow 1 = i$$

بفرض المعادلة $1 = i$

$$1 = i \Rightarrow 1^2 = i^2 \Rightarrow 1 = -1$$

$$1 = -1 \Rightarrow 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0$$

بالجمع

$$2 = 0$$

وبالتكويظ في

$$1 = i$$

العمليات على الأعداد المركبة

(P) جمع وطرح الأعداد المركبة

عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً.

مثال أو بدائل كل من :-

$$I \quad (2+7i) + (5-9i) =$$

الحل

$$= (2+5) + (7-9)i = 7-2i$$

II

$$(4-9i) - (5-0i) =$$

الحل

$$= (4-5) + (-9-0)i = -1-9i$$

$$= (-4-3i) + (0-9i) = -4-12i$$

نتائج مهمة جداً

$$*(1+i)^2 = 2i$$

$$*(1-i)^2 = -2i$$

$$*(3+9i)^2 =$$

الحل

$$= 9 + 54i + 81i^2 = 9 + 54i - 81 = -72 + 54i$$

$$*(4+3i)(5-9i) =$$

الحل

$$= 20 - 36i + 15i - 27i^2 = 20 - 21i + 27 = 47 - 21i$$

$$= 23-14i$$

العدد المركب المترافق

العدد المركب المترافق
لها نفس العدد ولكن يختلف
في إشارة الجزء التخيلي فقط

مثال

$$\text{مترافق } 2+3i \leftarrow 2-3i$$

$$\text{مترافق } 2-3i \leftarrow 2+3i$$

$$\text{مترافق } 3i \leftarrow -3i$$

$$\text{مترافق } 2 \leftarrow 2$$

ملحظة مهمة

مجموع عددين مترافقين يساوي
في المقادير فنلاحظ من ذلك
عن طريق ضرب في مترافقه المقادير
ليحاط ومقاماً

$$\text{مثال اختر } \frac{3}{2+3i}$$

الحل

$$\frac{3}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{3(2-3i)}{4-9i^2} = \frac{6-9i}{13}$$

$$\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$$

وأخيراً

للعقد المركبة كالصورة الحثلية
والصورة الأسية ولقد درسنا
في الصف الثالث الثانوي

المصفوفات

المصفوفة هي ترتيب لعدد من العناصر
في شكل صفوف أفقية وأعمدة
رأسية بين قوسين

المصفوفة المكونة من 3 صفات و 2 عموداً تكون في النظم 3×2

عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف \times الأعمدة
$$= 3 \times 2$$

بعض المصفوفات الخاصة

1. مصفوفة الصفر

هي مصفوفة تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة

مثال $(0 \ 0 \ 0)$ $(0 \ 0 \ 0 \ 0)$

2. مصفوفة الوحدة

هي مصفوفة تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف

مثال $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. مصفوفة العرجية

هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف
يساوي عدد الأعمدة

مثال $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

4. المصفوفة الصفيرية

هي مصفوفة لا يغير عناصرها أظهار
ورمزها \square

مثال $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. المصفوفة القطرية

جميع عناصرها أظهار ما عدا
عناصر أو أحد عناصر القطر الرئيس
ليساوي صفر

مثال $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. مصفوفة الوحدة

جميع عناصرها أظهار ما عدا
عناصر القطر الرئيس يساوي واحد
وترمز لها بالرمز I

مثال $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. تساوي مصفوفتين

عندما يتساوى كل عنصر في المصفوفة
الأولى مع نظيره في المصفوفة الاخرى
بشرط أن تكون المصفوفتان على نفس
النظم

مثال $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

الحل $1=1$ $2=2$ $3=3$ $4=4$ $5=5$ $6=6$

حزب المصفوفات

شروطها

أن تكون عدد أعمدة المصفوفة
يساوي عدد عناصر المصفوفة الثانية

مثال إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

فإن $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $PQ =$

الحل $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = PQ$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 10+1 \\ 4+1 & 16+0 \end{pmatrix} =$

المركب المصفوف للمصفوفة

$P^{-1} = \frac{1}{\Delta} P$

مثال إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $P^{-1} =$

الحل

$\Delta = 2 - 4 = -2 \neq 0 \quad |P| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$P^{-1} = \frac{1}{-2} P = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

حزب عددية قسمة مصفوفة

إذا كان

$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

مثال إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

فإن $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة

إذا كانت $P = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

فإن $P^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

مثال $P^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

المصفوفة المتماثلة ومشتقة المتماثلة

إذا كانت P مصفوفة مربعة فإن

(1) $P^{-1} = P$ إذا كانت P مصفوفة متماثلة

(2) $P^{-1} = -P$ إذا كانت P مصفوفة مشتقة متماثلة

مثال إذا كانت $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

متماثلة فأوجد P^{-1}

الحل

$1 = 1 + 0 = 1$
 $1 = 1 + 0 = 1$
 $1 = 1 + 0 = 1$

المصفوفة المثلثية

قيمة العنصر الذي على الصورة المثلثية
يا وي حامل ضرب عناصر القطر الرئيس

مثال

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & - \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times 0 - 1 \times 0 = 0$$

مثال

$$= 1 - 0 \times 0 = 1$$

رابعة) إيجاد مساحة المثلثات

إذا كان عدد من مئة

س (ل، م) س (ل، م) س (ل، م) س (ل، م)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} = 8$$

خامسة) إثبات أن النقطة هي استقامة

واحدة باستخدام المصفوفات

لإثبات أن النقطة س (ل، م)

س (ل، م) س (ل، م) س (ل، م) س (ل، م)

على استقامة واحدة

نثبت أن قيمة

المحدد = 0

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

22

المحددات

أولى) محدد الرتبة الثانية

قيمة محدد الرتبة الثانية يا وي حامل
حزب عناصر القطر الرئيس مطروحاً عنه
حامل ضرب عناصر القطر الفرعي.

مثال

$$(2 \times 4) - (1 \times 1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 1 = 7$$

مثال

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 2 = 1 - 4 = -3$$

ثانية) محدد الرتبة الثالثة

نقطة باستخدام أي من هذه أو عود ويضفل

لإستخدام الصف أو العمود الذي يحتوي

على أكثر من صف مع مراعاة قاعدة

إشارات العنصر

+

-

+

-

+

-

+

-

+

-

+

-

العتابعات

أولاً: العتابة الحاية:

① شرط العتابة الحاية هو أن يكون أي تناقص الحد السابق له يساوي مقدار ثابت وليس هذا المقدار الثابت أساس العتابة وثمرة بالرمز (3) $S = \text{أي حد سابق}$

مثال (١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥) ← هي متتابعة حسابية منتهية حيث $S = 4 - 1 = 3$

مثال (١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ ٤٩) ← هي متتابعة حسابية غير منتهية حيث $S = 3$

٢. الصورة العامة للعتابة الحاية:

(١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ ٤٩ ٦٤ ٨١ ١٠٠) حيث الحد الأول $P = 1$ الحد الذي قبله الأساس $S = 3$

$$S + P = 4 \quad S + P = 9 \quad S + P = 16 \quad S + P = 25 \quad S + P = 36 \quad S + P = 49 \quad S + P = 64 \quad S + P = 81 \quad S + P = 100$$

٣. الحد العام للعتابة الحاية:

$$n^2 = P + (n-1)S$$

الحد الأول رتبة الحد الأساس
 الخطلون

٤. ملاحظات عامة على العتابة الحاية

① أريد رتبة أول حد موجب أو آخر حد موجب نضع $n < P$

⑤ أريد رتبة أول حد سالبه أو آخر حد سالبه نضع $n > P$

⑥ أريد رتبة الحد الذي قيمته ٥ نضع $n = 5$

⑦ إذا كانت العتابة في صورة درجة أول كانت متتابعة حسابية وأساسها هو معامل n

⑧ لتكوين العتابة الحاية يلزم إيجاد (P) عن طريق حل معادلتها

⑨ قواعد جميع العتابة الحاية:

① إذا كان الحد الأول والأساس n يعني عدد حدود العتابة

$$\left[\frac{S(1-n) + P}{S} \right] \cdot \frac{n}{S} = n$$

② إذا كان الحد الأول والحد الأخير n يعني عدد حدود العتابة

$$\left[\frac{U + P}{2} \right] \cdot \frac{n}{2} = n$$

٦. خذ بالك من الكلام دا

① لو أعطى n في صورة دالة فإن

$$\frac{n}{1-n} - \frac{n}{n} = n$$

② أكبر مجموع للعتابة = مجموع الحدود الحويشة فقط أو آخر مجموع = مجموع الحدود السالبة فقط

③ أريد عدد الحدود التي تزيد على مجموع موجب نضع $n < P$

④ أريد عدد الحدود التي تزيد على المجموع السالب نضع $n > P$

الأسس عام

1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

عند ضرب الأسس المتشابهة نجمع الأسس

$2^m \times 2^n = 2^{m+n}$

عند قسمة الأسس المتشابهة نطرح الأسس

$2^m \div 2^n = 2^{m-n}$

4) $2^m (2^n) = 2^{m+n}$

5) (الأسس) $= 1$
 شرط حاجة \neq صفر

6) $2^m (2^n) = 2^{m+n} = 2^{\frac{m}{n} \cdot n} = 2^m$

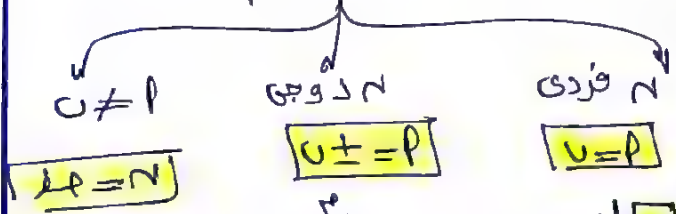
الحالات الأساسية

1) إذا كان الأسس = الأسس
 فإن الأس = الأس

أحياناً إذا كان $2^m = 2^n \iff m = n$

2) ولكن إذا كان الأس = الأس

لا يمكن إيجاد. أحياناً: $2^m = 2^n$



3) إذا كان $p = \frac{m}{n}$ فإن

$\frac{m}{n} p \pm = u$ (زوجي)
 $\frac{m}{n} p = u$ (فردى)

التوافيق

1) $\frac{n!}{r!} = n^r$ لو الحسالة فيها

توفيقاً وتبديلة لنفس العلم والدليل

2) $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!} = n^r$ (الأسس فوق تحت الفوق)

3) التبسيط

$n^r = n^r$

4) إذا كانت

$n^r = n^r$

أما $u = u$ أو $n = u + u$

5) $n^r = n^r = n^r$
 $n = n^r$

6) ترتيب n من الأشياء فمض = 1

7) ترتيب n من الأشياء في دائرة = 1

8) عدد أقطار المضلع المحدب الذي به

n فلع $= n^r - n$

9) التباديل \iff كل ترتيب الاختيار (n)

من الأشياء من بين (n) الأشياء

10) التوافيق \iff كل المجموعات الاختيار

من الأشياء من بين (n) من الأشياء

11) لا معنى لاسميت من

$1^r, 2^r, 3^r, \dots, n^r$

$r < n$

الفرع الثاني: نسب المثلثات

① الزاوية (١٨٠° - ٢٠°) لا
تغير شكل الدالة المثلثية وكانت
نראה الإشارة على حسب الدلي

فمثلاً: $\sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$

$\cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$

$\tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

$\cot(180^\circ - 20^\circ) = -\cot 20^\circ$

$\sec(180^\circ - 20^\circ) = -\sec 20^\circ$

② الزاوية (٩٠° - ٢٠°) تغير
شكل الدالة المثلثية وكذلك أيضاً
نראה الإشارة

فمثلاً: $\sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$

$\cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$

$\tan(90^\circ - 20^\circ) = \cot 20^\circ$

③ العمل العام على الدالة

* $\sin A = \cos B$

فإن: $\beta \pm 90^\circ = 20^\circ$

* $\cos A = \sin B$

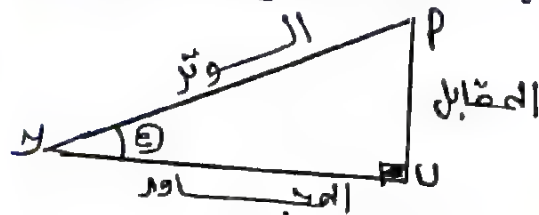
فإن: $\beta \pm 90^\circ = 20^\circ$

* $\tan A = \cot B$

فإن: $\beta + 90^\circ = 20^\circ$

الزاوية (٩٠° - ٢٠°)
للزاوية الحادة :-

في أي مثلث قائم الزاوية يكون



① $\sin 20^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{PQ}{PR}$

② $\cos 20^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{QR}{PR}$

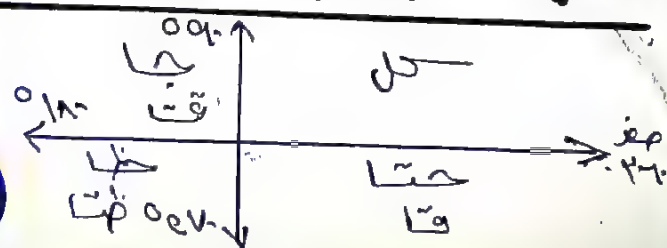
③ $\tan 20^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{PQ}{QR}$

ملاحظة: أبعاد الدالة مقبولة = 1

مثلاً: $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$

الزاوية	٢٠°	٣٠°	٤٥°
النسبة المثلثية	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ج	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ح	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ح	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	١

رابطات العلاقة بين الدوال
المثلثية للزاويتين المتكاملتين



أدلة القطع الدائري



هو جزء من سطح
الدائرة محدود
بفؤوس ونصف
قطريه

ملاحظة: $ل + ن = ٢$ نقطة

ملاحظة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

ملاحظة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

ملاحظة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة



ملاحظة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

مع المثلث

التحويل: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

التحويل: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

أدلة القطع الدائري



هو جزء من سطح الدائرة محدود
بفؤوس وقوس

ملاحظة: $ل + ن = ٢$ نقطة

ملاحظة

ملاحظة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

أدلة القطع الدائري

مساحة القطاع مستقيمة

مساحة القطاع مستقيمة: $\frac{ل}{٢} = ن$ نقطة

حيث $ن$ عدد الدوائر
س حول القطر

أدلة القطع الدائري

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة القطع الدائري

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة القطع الدائري

أدلة: $ل = ن$ نقطة

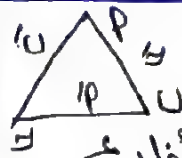
أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

أدلة: $ل = ن$ نقطة

قانون الجيب



في أي مثلثه تتناسب أطوال أضلاع
المثلث مع جيوب الزاوية المقابلة
لها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نفسه نقطة بضعة طر الدائرة الخارجة
لرؤوس المثلث.

ومن خواص التناسيب

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نستخدم هذه القاعدة في حالة وجود
زاويتان و ضلع في المثلث.

قاعدة جيب التمام

(أ) في حالة وجود ضلعين و زاوية محصورة

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

(ب) في حالة وجود ثلث زوايا و ضلع

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \end{aligned}$$

القانون التفاضل

(أ) إذا كانت د (س) = س^ن جيبه

$$D(s^n) = n s^{n-1}$$

مثال $D(s^5) = 5s^4$

$$D(s^0) = 0$$

(ب) إذا كانت د (س) = س^{-ن}

$$D(s^{-n}) = -n s^{-n-1}$$

مثال $D(s^{-2}) = -2s^{-3} = -\frac{2}{s^3}$

$$D(s^0) = 0$$

$$D(s^1) = 1s^0 = 1$$

(ج) مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$D(uv) = u Dv + v Du$$

مثال $D(s(s+1)) = (s+1) + s(1) = 2s+1$

$$D(s(s+1)) = (s+1) + s(1) = 2s+1$$

$$D(s(s+1)) = (s+1) + s(1) = 2s+1$$

(د) مشتقة خارج قسمة دالتين

$$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v Du - u Dv}{v^2}$$

$$D\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{(s-1)(1) - (s+1)(1)}{(s-1)^2} = \frac{-2}{(s-1)^2}$$

$$D\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{(s-1)(1) - (s+1)(1)}{(s-1)^2} = \frac{-2}{(s-1)^2}$$

$$D\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{(s-1)(1) - (s+1)(1)}{(s-1)^2} = \frac{-2}{(s-1)^2}$$

ثابتة قواعد النهايات عند نقطة

1) التحويلات الجبرية على عدد حقيقي
تعتبر النهاية زمالوا أعطى الناتج
عدد [قيمة فيز معرفة] ولكن، اذا كان
الناتج $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$ [قيمة فيز معرفة]
مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$

بعض $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = (2-2) = 0$

بعض $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$

2) استخدام التحليل في إيجاد النهاية
إذا كان الناتج التحويلات الجبرية $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$
مثال: أوجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

بالتحويص الجبري $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$

بعض $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$

3) استخدام القسمة المطولة في إيجاد
النهاية أيضاً إذا كان ناتج التحويلات $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$
وكان المقادير معقدة تحليلية

مثال: أوجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

الطريقة
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$

5 مشتقة الجذر التربيعي:-

$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

فإن $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6 مشتقة القوس:-

$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

مثال: إذا كان $y = \sin(x)$

فإن $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

إذا كانت $y = \sin(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

فإن $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

مثال: إذا كانت $y = \sin(x)$

فإن $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

7 مشتقة الدوال العكسية:-

$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

مع تذكر أن $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

٦ إيجاد النهاية الدالة عند ∞

$$\text{نقطة لـ } \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

فكرة الحل

نقسم على س مرفوعة الأكبر أس في المقام

$$\frac{5x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 9}$$

$$\frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - 5 + 9}$$

$$\frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{5}$$

$$\frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{5}$$

$$\frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5x} + \frac{7}{5x^2}$$

٧ إيجاد وجود نهاية دالة معرفة

عند أكثر من قاعدة عند نقطة

عند ما يكون للدالة نهاية عند P

إذا كانت نهايتها على اليمين واليسار عند P موجودتين ومتساويتين

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 5x + 2) = 2 - 10 + 2 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5x + 2) = 2 - 10 + 2 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 2) = -6$$

الدالة لها نهاية عند 2 وتساوي -6

30

$$\frac{(x^2 - 5x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 2)} = \frac{x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \frac{x^2 - 4x + 4 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2 + x - 2}{x - 2} = x - 2 + \frac{x - 2}{x - 2} = x - 2 + 1 = x - 1$$

٤ استخدام الطريقة في المرافقة في إيجاد النهاية

أيضا إذا كان الناتج غير معرف ووجدت حد آخر

في البسط أو في المقام أو في كليهما

$$\frac{1 - x}{1 + x}$$

$$\frac{1 - x}{1 + x} = \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{1 - x}{1 - x} = \frac{(1 - x)^2}{1 - x^2}$$

$$\frac{(1 - x)^2}{1 - x^2} = \frac{(1 - x)^2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 + x} = 0$$

٥ استخدام القانون في إيجاد النهاية

إذا كان الناتج غير معرف وحاصل المقادير مكون من

حدس مرفوعة الأس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = \frac{\infty - \infty + 2}{\infty - \infty + 9} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 9} = 1$$

ثالث: الهندسة التحليلية

1. الهندسة التحليلية

إذا كانت $P = (3, 4)$ و $Q = (5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

مثال: أوجد طول PQ إذا كان

$$P(3, 4) \text{ و } Q(5, 6)$$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ملحوظات عامة

- معرفة نوع المثلث من حيث أطوال أضلاعه
- توجد البرهان لكل نقطة ونقطة
- معرفة نوع المثلث من حيث دواياه
- توجد البرهان لكل نقطة أو مربع
- إذا كان

$$\begin{aligned} & \text{إذا كان } PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ & \text{فإن } PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ & \text{فإن } PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. إيجاد منصف قطعة مستقيمة

إذا كان $P = (3, 4)$ و $Q = (5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

مثال: إذا كان $P(3, 4)$ و $Q(5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(0, 2) =$$

1. كيفية إيجاد اتصال دالة عند نقطة P

الدالة متصلة عند P إذا تحققت الآتي

د (P) معرفة الدالة لها نهاية عند $P =$ نهايتها = نهاية الدالة

مثال: البحث عن اتصال الدالة عند $c =$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حيث } D(c) = \frac{2c-5}{c-5} \\ & c \neq 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & c = 5 \\ & c = 5 \end{aligned}$$

الجدول

$$D(c) = \frac{2c-5}{c-5}$$

$$D(c) = \frac{2c-5}{c-5} = \frac{2(5)-5}{5-5} = \frac{5}{0}$$

$$D(c) = \frac{2c-5}{c-5} = \frac{2(5)-5}{5-5} = \frac{5}{0}$$

$$D(c) = \frac{2c-5}{c-5} = \frac{2(5)-5}{5-5} = \frac{5}{0}$$

∴ الدالة متصلة عند $c = 5$

2. اتصال دالة على فترة

(أ) الدالة كثيرة الحدود

متصلة على أي فترة جزئية منها

(ب) الدالة الكسرية

متصلة على $\{ \text{أعداد حقيقية} \}$

(ج) دالة القيمة

متصلة على أي فترة جزئية منها

(د) الدوال المثلثية

• الجيب وجيب التمام متصلة على

• اما دالة الظل متصلة على

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right) \cup \dots$$

طرق إيجاد الميل

١) معلومية نقطة

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق المراتب}}$$

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم المار

$$(200, 1) \text{ و } (100, 6)$$

الخط

$$m = \frac{1-6}{200-100} = \frac{-5}{100} = -\frac{1}{20}$$

٢) معلومية الزاوية الموضوعة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مثال: إذا كانت $\theta = 45^\circ$
 زاوية مادة $\theta = 45^\circ$
 منفرجه $\theta = 135^\circ$
 $m = \tan 45^\circ = 1$

$$\text{الميل} = \tan \theta$$

مثال: إذا كانت $\theta = 45^\circ$

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

٣) ميل الخط المستقيم الذي معادلة عامه

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\text{الميل} = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

مثال: أوجد ميل المستقيم $2x + 5y - 4 = 0$

$$m = -\frac{2}{5}$$

٤) ميل الخط المستقيم مع الصورة

$$m = \frac{1}{m'}$$

$$\text{الميل} = \frac{1}{\text{معامل } x}$$

الزاوية θ مع محور السينات

٥) ميل المستقيم المار بنقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

٤) معادلة الخط المستقيم

١) معلومية الميل ونقطة عليه

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي ميله

$$m = 2 \text{ و يمر بالنقطة } (100, 1)$$

الخط

$$y - 1 = 2(x - 100) \Rightarrow y = 2x - 199$$

٢) معلومية نقطة عليه

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم المار

$$(200, 1) \text{ و } (100, 6)$$

الخط

$$\frac{y - 1}{1 - 6} = \frac{x - 200}{200 - 100} \Rightarrow y - 1 = -5(x - 200) \Rightarrow y = -5x + 1001$$

٣) معلومية ميله وطول الجزء المقطوع

محاور الصادات

$$y = mx + c$$

مثال: معادلة المستقيم الذي ميله 2 ويصنع

$$\theta = 45^\circ \text{ مع محاور الصادات}$$

$$m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow y = x + c$$

32

ثالثاً: تطابق

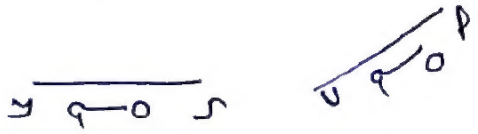
(أ) تطابقه زاوية

تطابق الزاوية إذا كانتا متساويتان في القياس



(ب) تطابقه قطعتين مستقيمتين

تطابق القطعتين المستقيمتين إذا كانتا متساويتان في الطول



(ج) تطابقه المثلثات

الحالة الأولى تطابقه المثلثات إذا

تطابقه ضلعان وزاوية واحدة في أحد المثلثات مع نظائرها في المثلث الآخر

الحالة الثانية تطابقه المثلثات إذا

تطابقه زاويتان والضلع المحصور بين رؤسهما في أحد المثلثات مع نظائرها في المثلث الآخر

الحالة الثالثة تطابقه المثلثات إذا

تطابقه ضلعان في أحد المثلثات مع نظائره في الآخر

الحالة الرابعة تطابقه المثلثات

القائمة الزاوية إذا تطابق وتر واحد من الضلعين في أحد المثلثات مع نظائرها في المثلث الآخر

الأسطورة

33

أبواب الهندسة المستوية أولاً: أنواع الزوايا

١) الزاوية الصفرية 0° قياسها = 0°

٢) الزاوية الحادة قياسها أكبر من 0° وأقل من 90°

٣) الزاوية القائمة قياسها = 90°

٤) الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180°

٥) الزاوية المستقيمة قياسها = 180°

٦) الزاوية المتعكسة قياسها أكبر من 180° وأقل من 360°

ثانياً: العلاقة بين الزوايا

١) الزاويتان المتضابتان بالرأس

هما زاويتان متساويتان في القياس

٢) الزاويتان المتتامتان مجموعهم = 90°

٣) الزاويتان المتكاملتان مجموعهم = 180°

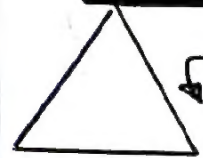
٤) الزوايا المتجهية حول نقطة واحدة مجموعهم = 360°

٥) مكملات الزوايا الواحدة متساوية في القياس

٦) مكملات الزوايا الواحدة متساوية في القياس

٧) الزاويتان المتجاورتان المتتامتان ضلعاهما مشتركان أما المتكاملتان فإن ضلعاهما على استقامة واحدة

خامساً: قوانين المساحة والاحجام



المثلث

مساحة

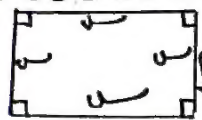
يجمع أطوال أضلاعه

مساحة

* $\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع

* $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلع \times جيب المحصور

* $\sqrt{2(2-a)(2-b)(2-c)}$ [هيرون]



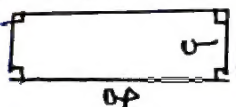
المربع

مساحة

يجمع أطوال أضلاعه = $a + b$

مساحة $\frac{1}{2} \times$ (القطر) \times (القطر) $\div 2$

طول الضلع \times نصفه = $a \times \frac{a}{2}$



المستطيل

مساحة

(الطول \times العرض) $\div 2 = \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

مساحة

الطول \times العرض = $a \times b$

المكعب

المساحة الجانبية = $4 \times l$

المكعب = l^3

الحجم = l^3

وابعاً: إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن:

١) كل زاويتان متبادلتان [شكل Z] متساويتان
في الشكل

مثلاً: $\angle 1 = \angle 2$ (بالتبادل)

٢) كل زاويتان متناظرتان [شكل F] متساويتان
في الشكل

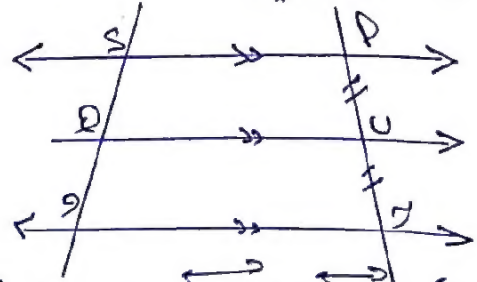
مثلاً: $\angle 1 = \angle 2$ (بالتناظر)

٣) كل زاويتان متداخلتان وفي جهة واحدة من الضام متتامتان

مثلاً: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

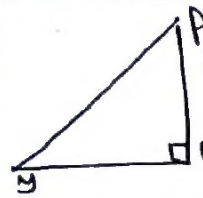
قاعدة متطرفة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمان متوازيين وكانت أطوال القطع الناتجة من أحد الضاميين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة من الضام الآخر تكون أيضاً متساوية



إذا كانت $a = b = c$ وكانت $d = e = f$

فإن $a = b = c$



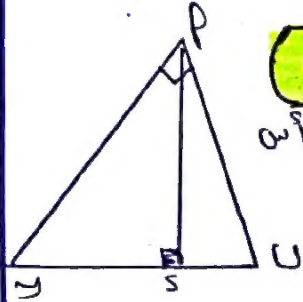
(٥) نظرية فيثاغورس

في Δ القائم الزاوية يكون مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

$$\text{مثلاً: } (PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2$$

$$(PQ)^2 = (PR)^2 - (QR)^2$$

$$(QR)^2 = (PR)^2 - (PQ)^2$$



(٥) نظرية أويلر

شكلاً: عمود شاذل من رأس القائمة

$$(PQ)^2 = PR \times QR$$

$$(QR)^2 = PR \times PQ$$

$$(PR)^2 = QR \times PQ$$

$$\frac{PQ \times QR}{PQ} = PR$$

(٥) المثلث المتساوي الساقين

• زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان في القياس

• متوسط Δ المتساوي الساقين العمودي من الرأس ينصفه زاوية الرأس ويكون عموداً على القاعدة

• المستقيمة العمودية من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودية على القاعدة جارية لينصفه كل من الضلعين وزاوية الرأس

• منصفه زاوية رأس Δ المتساوي الساقين يكون عموداً على القاعدة وينصفها

• عدد محاور تماثل المتساوي الساقين = 1
أما Δ المثلث = 3 بينما Δ مختلف

الذي ضلعي = Δ متساوي

35

متوالت المستويات

السطوح المائلة إلى الأرض القائمة

القاعدة

المنشور

المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع

الكلية = Δ الجانبية + منصفها مساحة القاعدة

الاجزاء = مساحة القاعدة \times الارتفاع

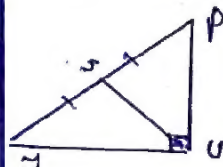
سادساً: نظريات المثلث

(٥) متوسط المثلث

• متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس

• متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

• نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة 2:1 من جهة القاعدة 1:2 من جهة الرأس



(ب) المثلث القائم الزاوية

• طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة = $\frac{1}{2}$ طول الوتر
• طول الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم = $\frac{1}{2}$ طول الوتر
• أما طول الضلع المقابل للزاوية 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول الوتر
• في Δ القائم الزاوية يعتبر الوتر هو أطول أضلاع المثلث

(و) المثلث المتساوي الأضلاع

- كل زوايا المثلث المتساوي الأضلاع متطابقة وقيل كل منها $= 60^\circ$
- إذا كانت أضلاع دوايا المثلث متساوية فإنه يكون متساوي الأضلاع
- المثلث المتساوي الأضلاع الباقيته الذي إحدى من زوايا 60° يكون متساوي الأضلاع

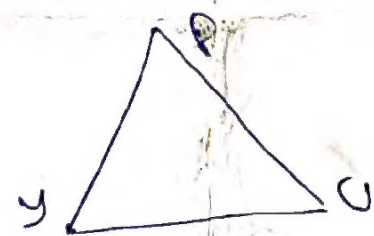
(ز) محور التماس

- محور تماس القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها
- أي نقطة تقع على محور تماس القطعة الحقيقية تكون على بعدين متساويين من طرفيها
- محور تماس الدائرة = عدد الأضلاع $= 1$

(ح) علاقات التماس في الدائرة

متساوية الأضلاع

في أي مثلث يكون مجموع طوله أي ضلعيه أكبر من طول الضلع الثالث

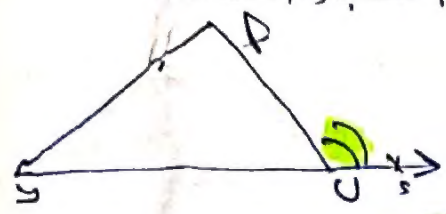


$$PQ < QR + RP$$

$$QR < RP + PQ$$

$$QR < RP + PQ$$

• قياس أي زاوية خارجية للمثلث أكبر من أي زاوية داخلية ما عدا الضلعين لها



أو يفي

$$\angle Q < \angle P + \angle R$$

$$\angle P < \angle Q + \angle R$$

- إذا اختلفت طوله فليكن في مثلث فأبصرهما في الطول تقابلته زاوية أكبر في الضلعين من قياس الزاوية المقابلة للقطع الآخر

- إذا اختلفت قياسا زاويتي في مثلث فأبصرهما في القياس تقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الزاوية

تم بحمد الله تعالى
من الاعتماد من
المذكرة التأسيسية
إعداد الأستاذ P / أيمن
محمود - / ت